

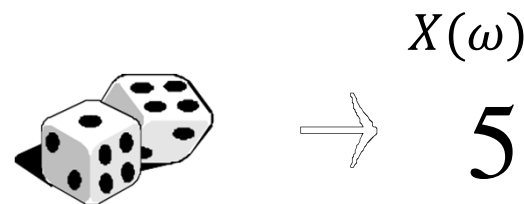
2. 1 Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma variável que assume um valor numérico determinado por uma experiência aleatória. A sua definição formal é a seguinte.

- **Definição – Variável aleatória**

Uma variável aleatória, X , é uma função com domínio Ω e com contradomínio em \mathfrak{R} . Assim, $X : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \mathfrak{R}$.

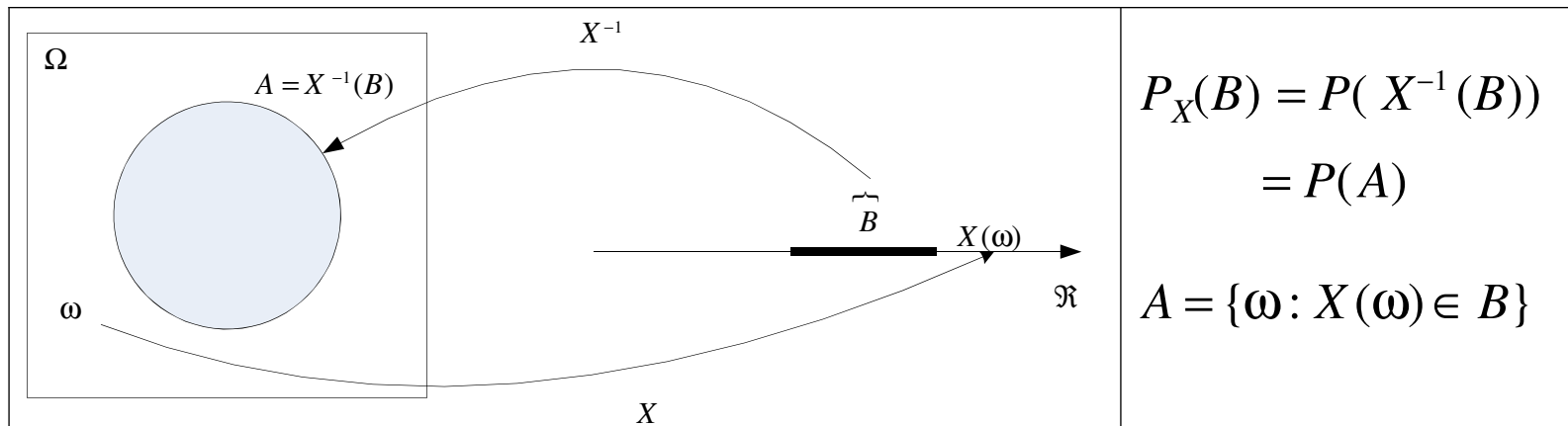
- **Exemplo 2.1**– Quando se lançam dois dados e se regista apenas a soma de pontos obtida está-se a trabalhar com uma variável aleatória definida pela correspondência



Em termos formais: $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $X[(i, j)] = i + j$.

Comentários:

- A função X faz corresponder a cada $\omega \in \Omega$ um e só um $X(\omega) \in \mathfrak{R}$;
- Definida a variável aleatória, considera-se \mathfrak{R} como o novo espaço de resultados e os subconjuntos $B \subset \mathfrak{R}$ como acontecimentos.
- A prob. de $X \in B$, $P_X(B) = P_X(X(\omega) \in B)$ é dada pela imagem inversa de B



- Por “abuso de linguagem” também se chama variável aleatória à imagem $X(\omega)$;
- Não havendo confusão,
 - utiliza-se X em vez de $X(\omega)$ para a imagem de ω ;
 - abandona-se o índice X , escrevendo-se $P(B)$ em vez de $P_X(B)$.

- **Convenção importante:** A **variável aleatória** é designada por **letra maiúscula** enquanto os **particulares valores** que resultam de cada experiência são representados pela respectiva **letra minúscula**.
- **Exemplo 2.2** – Retome-se o exemplo 2.1 (soma dos pontos em 2 dados). No quadro indicam-se as imagens, as imagens inversas e as probabilidades relevantes.

$$P_X(\{2\}) = P(X = 2) = 1/36, P_X(\{3\}) = P(X = 3) = 2/36 = 1/18, \dots$$

Imagens	Imagens inversas	Prob
{2}	{(1,1)}	1/36
{3}	{(1,2), (2,1)}	2/36
...
{7}	{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}	6/36
...
{12}	{(6,6)}	1/36

Calcule-se a probabilidade de $B = (3,4]$.



Exemplo 2.3: Lança-se ao acaso uma moeda ao ar duas vezes. Seja X =número de vezes que aparece “Face”. Determine $P(X=0)$, $P(X=1)$ e $P(X=2)$.

2.2 Função de distribuição

Ideia: Substituir a medida de probabilidade P por uma função real de variável real, de tratamento matemático mais acessível

- **Definição – Função de distribuição**

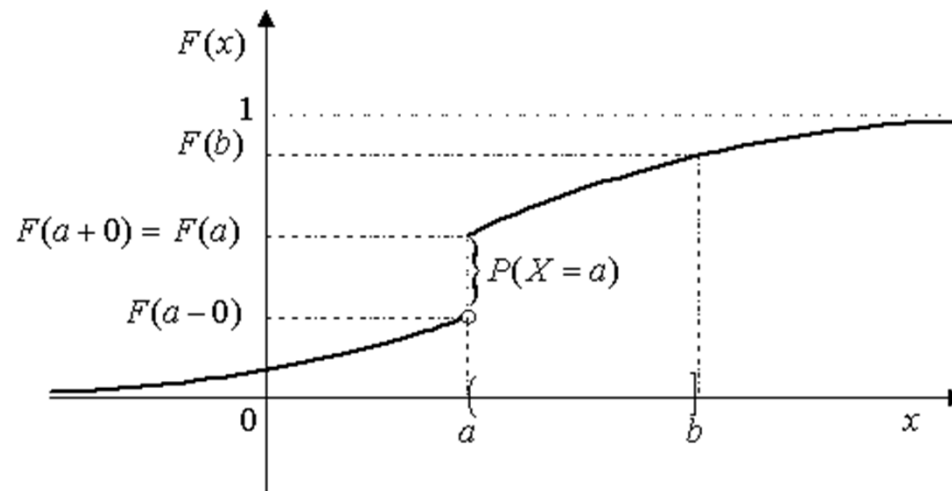
A função real de variável real, F , com domínio \mathfrak{R} , definida por, $F_X(x) = P(X \leq x)$, designa-se por função de distribuição da variável aleatória X .

- **Comentários**

- $F_X(x) = P(X \leq x)$ existe sempre por definição
- $F_X(x)$ não é mais do que a probabilidade do acontecimento $B = (-\infty, x]$.
- Quando tal não provoque confusão escreve-se $F(x)$ em vez de $F_X(x)$.

Propriedades da função de distribuição ($a, b, x, \Delta x \in \mathfrak{R}$):

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2) F é não decrescente: $\Delta_x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta_x)$.
- 3) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- 4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathfrak{R}$ a verificar $b > a$.
- 5) F é contínua à direita: $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.
- 6) $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$, com $F(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$ qualquer que seja $a \in \mathfrak{R}$.





Mais propriedades (fácil demonstração a partir das anteriores):

- a) $P(X < b) = F(b^-)$;
- b) $P(X > a) = 1 - F(a)$;
- c) $P(X \geq a) = 1 - F(a^-)$;
- d) $P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$;
- e) $P(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$;
- f) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$.

- **Teorema** – A função real de variável real, F , é uma **função de distribuição** se e só se verifica as **propriedades 2, 3 e 5**
- **Exemplo 2.4** – Será que

$$F(x) = 1 - e^{-x} \quad (x > 0)$$

define uma função de distribuição?



2. 3. Classificação das variáveis aleatórias

Conjunto dos pontos de descontinuidade de $F(x)$:

$$D = \{x : P(X = x) = F(x) - F(x^-) > 0\}$$

- Em cada ponto de descontinuidade x_i , o salto é igual a $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-)$.
- O conjunto D é finito ou, quando muito, infinito numerável

Definição – Classificação das variáveis aleatórias

- X é uma **variável aleatória discreta** se $P(X \in D) = \sum_{x_i \in D} P(X = x_i) = 1$
- X é uma **variável aleatória contínua** se $D = \emptyset$ e se existe uma função real de variável real $f(x)$, não negativa, tal que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du \quad \forall x \in \mathfrak{R}$
- X é um **variável aleatória mista** se a respetiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda)F_2(x)$, ($0 < \lambda < 1$) onde:
 - $F_1 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
 - $F_2 \rightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Existem variáveis aleatórias que não são nem discretas, nem contínuas nem mistas.



2.4 Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória é discreta se só pode assumir uma quantidade numerável de valores.

- **Definição – Função probabilidade:**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

- A probabilidade de qualquer acontecimento B pode ser obtida exclusivamente a partir da função probabilidade

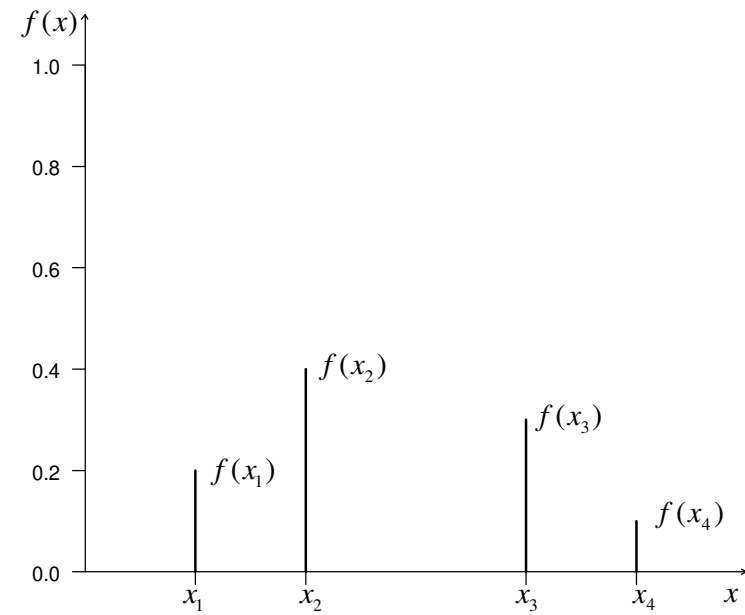
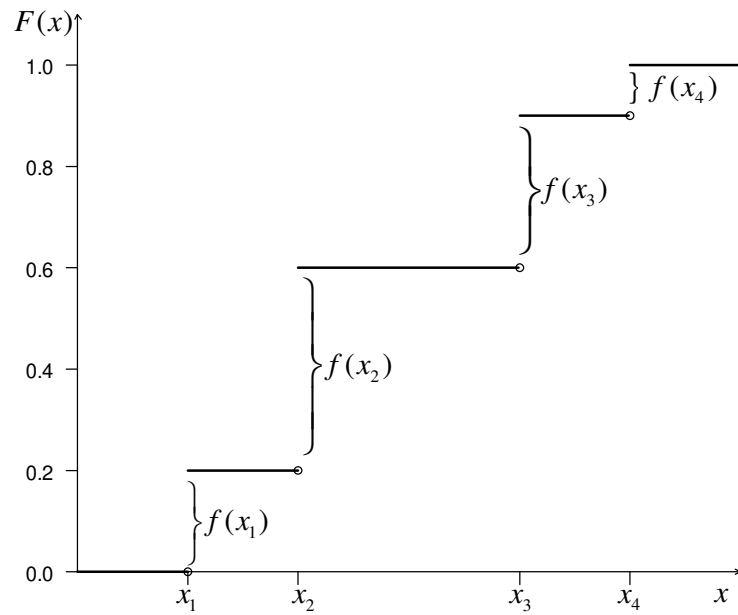
$$P(X \in B) = P(B) = \sum_{x_i \in B \cap D} f(x_i).$$

- A função de distribuição pode exprimir-se em termos da respectiva função probabilidade,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

representando-se por x_i os elementos do conjunto D

- A função de distribuição apresenta tantos saltos quantos os elementos do conjunto D .



Exemplo 2.5 – Considere-se a variável aleatória associada com a contagem do número de faces obtido no lançamento de três moedas regulares. O número de «faces» em três lançamentos só pode ser 0, 1, 2 ou 3.

Portanto:

– Quando $x < 0$, $F(x) = 0$;

– Quando $0 \leq x < 1$, $F(x) = P(X = 0) = (1/2)^3 = 0.125$;

– Quando $1 \leq x < 2$:

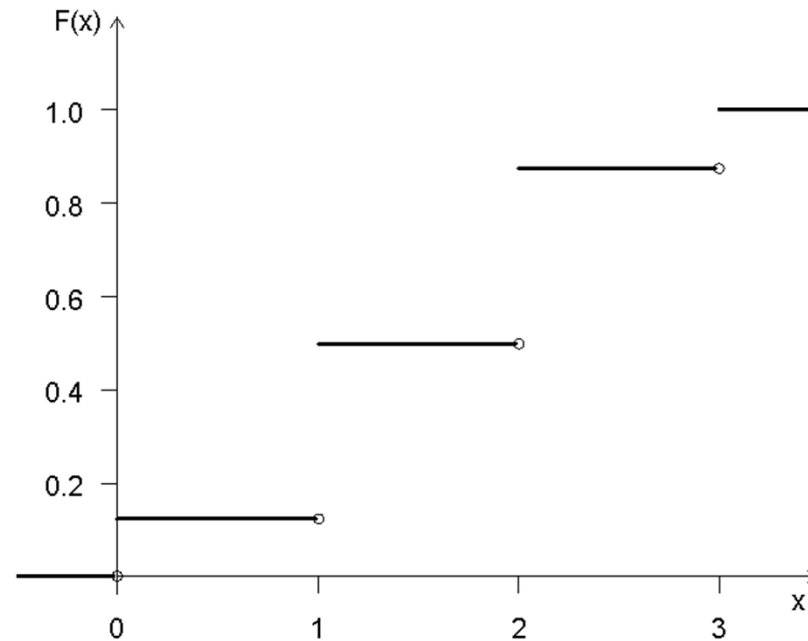
$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 = 0.500;$$

– Quando $2 \leq x < 3$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 = 0.875; \end{aligned}$$

– Quando $x \geq 3$: $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

Consequentemente $F(x)$ tem a seguinte representação gráfica:



- **Exemplo 2.6** – Seja X o número de lançamentos de um dado até sair uma «sena» (6 pontos) . Obtenha as funções probabilidade e distribuição de X .

2.5 Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória contínua pode tomar todos os valores num determinado intervalo de reais.

- **Definição – Função densidade de probabilidade**

A função real de variável real $f(x)$, não negativa, tal que satisfaz a condição $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$, $\forall x \in \mathfrak{R}$, chama-se função densidade de probabilidade.

Noção de função densidade: Sabe-se que $P(X \in \mathfrak{R}) = 1$ e que

$$P(X \in (-\infty, x]) = F(x), \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Para } \Delta x > 0, P(X \in (x, x + \Delta x]) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

A quantidade média de probabilidade no intervalo $(x, x + \Delta x]$ vem

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

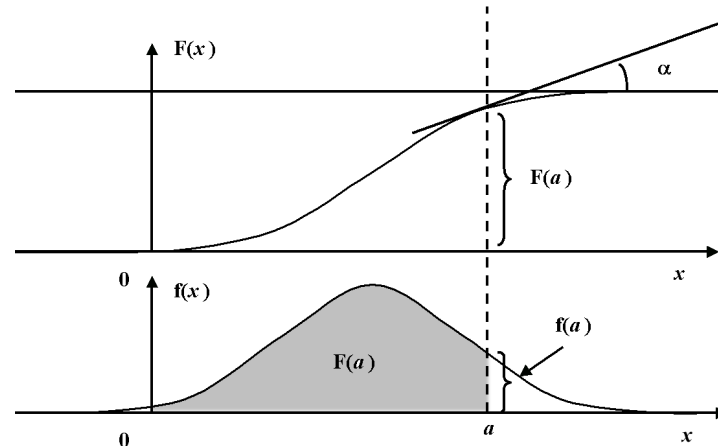


O limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, se existir, representa a densidade de probabilidade no ponto x , $f(x)$. Recorde-se que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$

Nos pontos em que $F'(x)$ não existe, convencionou-se que $f(x) = 0$. Assim,

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{(nos pontos onde existe derivada),} \\ 0 & \text{(nos outros pontos).} \end{cases}$$

Representação gráfica



Para cada ponto a , verifica-se facilmente que:

- $F(a)$ é a ordenada da função distribuição = área delimitada pela função densidade entre $-\infty$ e a ;
- $f(a)$ é a ordenada da função densidade = declive da função de distribuição no ponto a .

É indiferente representar uma variável aleatória contínua com a respetiva função distribuição ou com a função densidade.



Algumas propriedades da função densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R};$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1;$
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b), \quad b > a$
- Sendo X variável aleatória contínua, $P(X = a) = 0, \quad \forall a \in \mathfrak{R}$ (**a probabilidade em qualquer ponto é nula**) já que $P(X = a) = F(a) - F(a^-) = F(a) - F(a) = 0;$
- Assim
$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b), \quad b > a.$$
- A função de densidade pode assumir valores superiores a 1 (**a função densidade não é uma probabilidade!**)



Exemplo 2.7: Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \text{ Obtenha a função distribuição de } X.$$

Exemplo 2.8 – Assume-se que X , vida útil, em milhares de horas, de um componente de determinado tipo de radar tem uma função de distribuição da forma

$F(x) = 1 - \exp\{-\theta x\}$, onde θ é um parâmetro que caracteriza a qualidade do componente (quanto menor é θ , melhor é a qualidade). Assuma-se que $\theta = 0,03$.

Pretende determinar-se a probabilidade de um componente escolhido ao acaso:

- a) dure menos de 20 mil horas;
- b) dure entre 30 mil e 50 mil horas;
- c) dure mais de 60 mil horas.

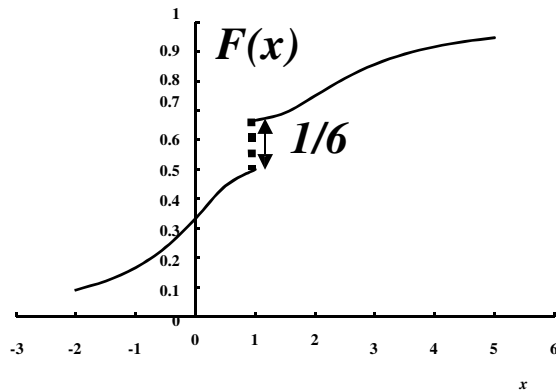
Resolver com base na função distribuição e com base na função densidade

2.6 Variáveis aleatórias mistas:

Combinam as 2 situações anteriores

Exemplo 2.9 – Considere-se a variável aleatória mista X com função de distribuição,

$$F(x) = \begin{cases} [2 + (x - 1)^2]^{-1} & (x < 1) \\ 1 - [3 + (x - 1)^2]^{-1} & (x \geq 1) \end{cases}$$



O único ponto de descontinuidade é $x = 1$.

Logo:

$$P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 1/6$$

$$P(X = x) = 0, \quad x \neq 1$$

Por outro lado,

$$P(0.5 < X < 1) = F(1^-) - F(0.5) = 1/18, \quad P(-1 < X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1/2$$



2.7 Funções de uma variável aleatória

- Definiu-se a v.a. X , conhecendo-se $F_X(x)$;
- Está-se interessado numa outra v.a., Y , função de X , $Y = \psi(X)$, pretendendo-se determinar a função de distribuição de Y , $F_Y(y)$, a partir de $F_X(x)$.
- ψ é uma função real de variável real;
- Y é uma variável aleatória que assume o valor $y = \psi(x)$ quando $X = x$.

Começa-se por considerar um caso particular mais simples: X é uma **variável aleatória discreta**.

- $Y = \psi(X)$ também é discreta e o problema consiste em determinar a função probabilidade de Y , $f_Y(y)$, a partir da função probabilidade de X , $f_X(x)$.
- Seja então $D = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ o conjunto de pontos que X assume com probabilidade positiva; consequentemente $D^* = \psi(D)$ é o conjunto de pontos que Y assume com probabilidade positiva.
- Dado $y \in D^*$ seja, $A_y = \{x: \psi(x) = y, x \in D\}$.
- A função probabilidade de Y vem dada por,

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(X \in A_y) = \sum_{x_i \in A_y} f_X(x_i)$$

Exemplo 2.10 – Considere-se a variável aleatória discreta X com a função probabilidade dada por:

x	-2	-1	0	1	2
$f_X(x)$	1/5	1/4	1/6	1/10	17/60

Seja $y = \psi(x) = x^2$.

Tem-se $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $D^* = \{0, 1, 4\}$. A função probabilidade de Y vem

y	0	1	4
$f_Y(y)$	1/6	7/20	29/60

Caso geral: X é uma **variável aleatória qualquer**

A mudança de variável assenta na igualdade, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(A_y)$ onde $A_y = \{x: \psi(x) \leq y\}$ e $P(A_y)$ pode em regra calcular-se a partir de $F_X(x)$.

Exemplo 2.11 – Supondo que a variável aleatória X tem função densidade

$$f_X(x) = 1/2 \text{ para } -1 < x < 1, \text{ isto é, } F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Determine as funções de distribuição de:

a) $Y = |X|$;

b) $Y = 2X + 1$;

Observação Final

Mesmo sendo X v.a. contínua e ψ é função contínua, Y pode não ser contínua.

X	$Y = \psi(X)$
Discreta	Discreta
Mista	Discreta Mista
Contínua	Discreta Mista Contínua

Exemplo 2.12 – Dada a variável aleatória X com função densidade,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases} \text{ introduza-se, } Y = \psi(X) = \begin{cases} 0 & (X < 0) \\ X & (X \geq 0) \end{cases}.$$

Obter a função de distribuição de Y .

2.8 Valor esperado de variáveis aleatórias

- **Exemplo 2.13** – Considere-se uma lotaria com 100 bilhetes e os seguintes prémios: um prémio de 100 euros; dois prémios de 20 euros; 3 prémios de 10 euros.

Fazendo a soma dos produtos das quantias que se podem ganhar pelas respectivas probabilidades,

$$100 \times \frac{1}{100} + 20 \times \frac{2}{100} + 10 \times \frac{3}{100} = 1,7$$

obtém-se o valor esperado do comprador de um bilhete.



- **Definição – Valor esperado de uma variável aleatória**

Seja X uma v.a. discreta com função probabilidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f_X(x),$$

quando, $\sum_{x \in D} |x| f_X(x) < +\infty$, define o **valor esperado, média** ou **esperança matemática** de X .

Notação: $E(X) = \mu_X = \mu$

Comentário:

- O valor esperado de uma variável aleatória discreta corresponde, muitas vezes, a um ponto que **não pertence** a D .

**Interpretação** (ponto de vista frequentista):

Se a experiência aleatória, em cada realização da qual se observa x , for repetida um grande número de vezes, a média aritmética dos valores obtidos está, quase certamente, “muito próxima” de $E(X)$.

Exemplo 2.14 – Se X é a variável aleatória que representa o número de pontos obtido com o lançamento de um dado regular, então é simples exercício verificar que $E(X) = 3.5$.

Repare-se que $E(X) \notin D$;

Exemplo 2.15 – No caso do exemplo 2.6 (nº de lançamentos até sair “6”), o cálculo do valor esperado torna-se um pouco mais complicado. Recorde-se que se tinha $f(x) = (5/6)^{x-1}(1/6)$, $x = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} x \left(\frac{5}{6}\right)^x = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{5/6}{(1 - 5/6)^2} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5/6}{1/36} = 6 \end{aligned}$$

Recorde-se que a soma de uma série aritmético-geométrica é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc^k = \frac{c}{(1-c)^2} \text{ para } |c| < 1$$

Exemplo 2.16 - Seja X uma variável aleatória com função probabilidade é dada por $f(x) = \frac{6}{(\pi x)^2}$, $x = 1, 2, 3, \dots$ em que $\pi = 3.14159\dots$

Mostre que $f(x)$ é de facto uma função probabilidade, mas $E(X)$ não existe. (Note que $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2} = \pi^2/6$).

- **Definição – Valor esperado de uma variável aleatória contínua**

Seja X uma v.a. contínua com função densidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx,$$

quando $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$, define o valor esperado, média ou esperança matemática de X .



- **Exemplo 2.17** – Obter o valor esperado da variável aleatória X , com função densidade

$$f_X(x) = 3x^{-4}, (x > 1)$$

- **Exemplo 2.18** – Mostre que a seguinte função é uma função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = x^{-2}, (x > 1).$$

Mostre também que $E(X)$ não existe.



2.9 Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

- **Definição – Valor esperado de uma função de variável aleatória**

$$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D} \psi(x) f_X(x), \quad \text{caso discreto}$$

$$E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x) dx, \quad \text{caso contínuo}$$

desde que $E[|\psi(X)|] < \infty$.

Note-se que, sendo X uma variável aleatória contínua, $\psi(X)$ **pode não ser contínua**, como se viu no capítulo anterior.

Observações

- A existência de $E(X)$ não implica a existência de $E[\psi(X)]$, e inversamente.
- É indiferente calcular $E[\psi(X)]$ pela definição do slide anterior ou proceder à mudança de variável $Y = \psi(X)$ e calcular $E(Y)$ recorrendo à definição usual, isto é

$$\sum_{y \in D_Y} y f_Y(y) = \sum_{x \in D_X} \psi(x) f_X(x) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x) dx$$

- **Exemplo 2.19** – Dada a variável aleatória discreta X , com função probabilidade,

$$f(x) = 1/3, \quad x = -1, 0, 1$$

considere-se a função $\psi(X) = X^2$. **Calcular $E(X^2)$ pelos 2 métodos.**

Exemplo 2.20 – Seja uma variável aleatória X com (retoma-se o exemplo 2.17)

$$f_X(x) = 3x^{-4}, \quad (x > 1), \quad F_X(x) = 1 - x^{-3}; \quad (x > 1)$$

Considere-se $Y = \psi(X) = X^2$. Obter $E(Y)$ (pelos dois métodos)

Obter agora $E(Z)$ com $Z = \begin{cases} 0 & 1 < X \leq 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$

Exemplo 2.21 – Considere uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^x & (x = 1, 2, \dots), \\ 0 & (\text{outros } x). \end{cases}$$

Seja $\psi(X) = 2^X$. Mostre que $E(X)$ existe, mas $E(\psi(X))$ não existe (note que $\sum_{x=1}^{\infty} xc^x = \frac{c}{(1-c)^2}$ para $|c| < 1$).

2.10 Propriedades dos valores esperados

Propriedades do valor esperado (seja X **discreta, contínua ou outra**):

1. Se c é uma constante então, $E(c) = c$.
2. Se c é uma constante e se existe $E[\psi(X)]$ então, $E[c\psi(X)] = cE[\psi(X)]$.
3. Se existirem $E[\psi_1(X)]$ e $E[\psi_2(X)]$ então,
$$E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)].$$

Observações

- Existindo $E(\psi_j(X))$, tem-se $E(\sum_{j=1}^n c_j \psi_j(X)) = \sum_{j=1}^n c_j E[\psi_j(X)]$
- Pode existir o V.E da soma sem que exista V.E de cada $\psi_j(X)$



2.11 Momentos em relação à origem

- Objetivo: Caracterizar uma v.a. através de um pequeno número de indicadores capazes de descrever os aspetos mais significativos do seu comportamento.
- Para tal utilizam-se 2 tipos de momentos:
 - Os momentos em relação à origem
 - Os momentos em relação à média



- **Definição – Momento de ordem k em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \quad (\text{se existir})$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

2.12 Momentos em relação à média

- **Definição – Momento de ordem k em relação à média**

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

Observações:

- Paralelismo com as definições anteriores com $\psi(X) = (X - \mu)^k$.
- Caso discreto $E(X - \mu)^k = \sum_{x \in D} (x - \mu)^k f_X(x)$ e caso contínuo

$$E(X - \mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f_X(x) dx$$

- Os momentos em relação à média podem ser expressos em termos dos momentos em relação à origem. Por exemplo

$$E(X - \mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$



- **Resultado importante**

É possível provar que, se existir o momento de ordem k de uma variável aleatória, então também existe o momento de ordem s , com $s < k$, da mesma variável aleatória. **Por exemplo, existindo o momento de ordem 10 existirão todos os momentos de ordem inferior a 10. Este resultado é válido para os momentos ordinário e para os momentos em relação à média.**

Localização

- **1º momento em relação à origem** (média ou valor esperado de X) serve como **parâmetro de localização** da distribuição de X .
- Avaliada a localização torna-se interessante avaliar a dispersão da variável aleatória em torno desta localização (volatilidade nas séries financeiras). Será a média “representativa” do comportamento da variável?



Dispersão em relação à média

- A dispersão e os momentos em relação à média: Parte-se da família de funções $\psi(X) = (X - \mu)^k$, onde $k = 1, 2, \dots$
- O 1º momento em relação à média é sempre nulo → **não tem interesse**.
- O **2º momento em relação à média**, a **variância** (representada por $\text{Var}(X)$, σ_X^2 ou simplesmente σ^2), é muito importante na análise da dispersão.
$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E((X - \mu)^2)$$

2.13 Variância de uma variável aleatória

Definição - Variância

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E((X - \mu)^2)$$

Comentários:

- Estamos a assumir que a variância existe
- A variância nunca pode ser negativa, $\text{Var}(X) \geq 0$;
- $\text{Var}(X) = 0$, só se X for variável aleatória degenerada: $P(X = c) = 1$;
- **Para o cálculo da variância pode aproveitar-se a relação**

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

- A existência da variância implica a existência da média



Propriedades da variância:

- 1) Se c é uma constante, $\text{Var}(c) = 0$;
- 2) Se c é uma constante, $\text{Var}(c X) = c^2 \text{Var}(X)$;
- 3) Se c e d são constantes, $\text{Var}(c X + d) = c^2 \text{Var}(X)$.

Variância, desvio-padrão e dispersão

- A variância corresponde ao valor esperado de uma grandeza ao quadrado logo não compara “bem” com a média desta grandeza. Assim utiliza-se geralmente a raiz quadrada positiva da variância, o **desvio padrão**.

- **Definição – Desvio-padrão** $\sigma = +\sqrt{\text{Var}(X)}$,

- **Definição – Coeficiente de variação**

Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente**

de variação: $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \mathcal{R}^+$)

- Depois de avaliar a **localização** e a **dispersão** de uma v.a., existem ainda 2 aspectos interessantes: a **skewness/assimetria** e a **kurtosis**



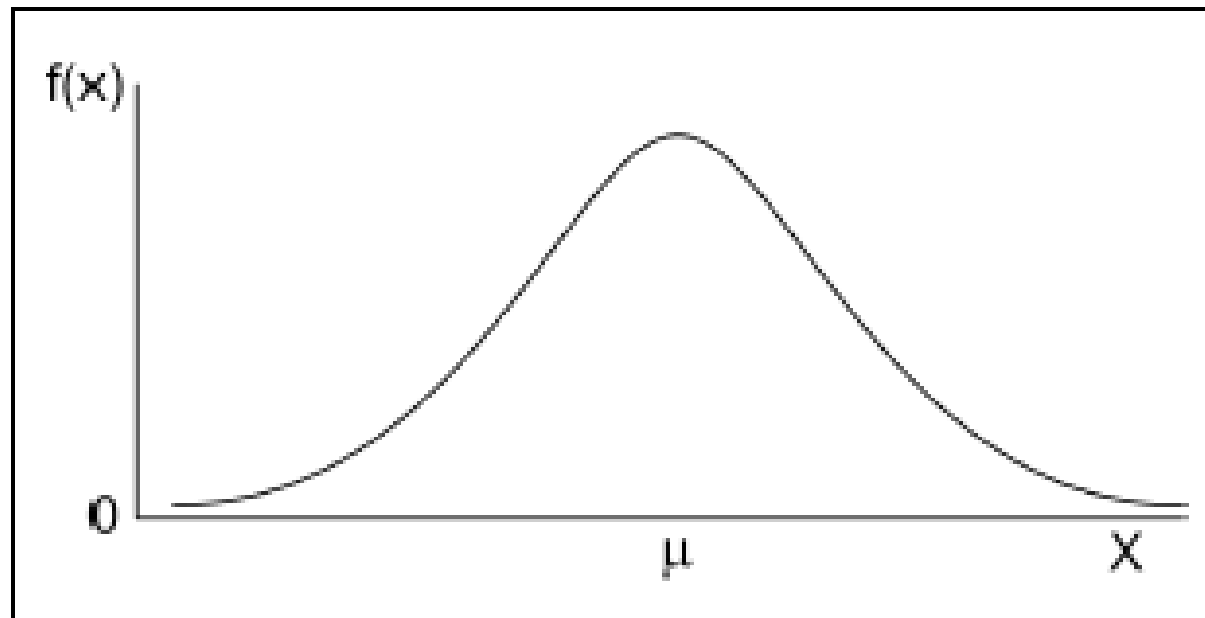
2.14 Skewness/Assimetria

- **Definição – Skewness ou coeficiente de assimetria:** $\gamma_1 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$,

Interpretação do coeficiente de assimetria:

- Parte-se do menor momento central de ordem ímpar que é possível utilizar;
- Porquê um momento central de ordem ímpar?
- Simetria da distribuição de X em relação à media $f(-x + \mu) = f(x + \mu)$ implica que **todos** os momentos centrais de ordem ímpar – que existirem – sejam nulos;

Função densidade simétrica:



- Distribuição simétrica $\rightarrow \gamma_1 = 0$

2.15 Kurtosis

• **Definição – Coeficiente de *kurtosis*:** $\gamma_2 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$.

Interpretação do coeficiente de *kurtosis*:

- “espessura” das “caudas” da distribuição ou, de forma equivalente, o “achatamento” da função densidade na zona central da distribuição.
- A definição é válida para v.a. discretas e contínuas mas o seu interesse reside sobretudo para v.a. contínuas com distribuição simétrica.
- Os coeficientes γ_1 e γ_2 desempenham um papel muito importante para analisar o **grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal**. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição simétrica, e $\gamma_2 = 3$. Muitas vezes utiliza-se o Excesso de Kurtosis dado por $\gamma_2 - 3$ para tornar a comparação com a normal mais direta.

Exemplo 2.22 – (Mesma localização e dispersão diferente) Considerem-se as variáveis aleatórias discretas com funções probabilidade,

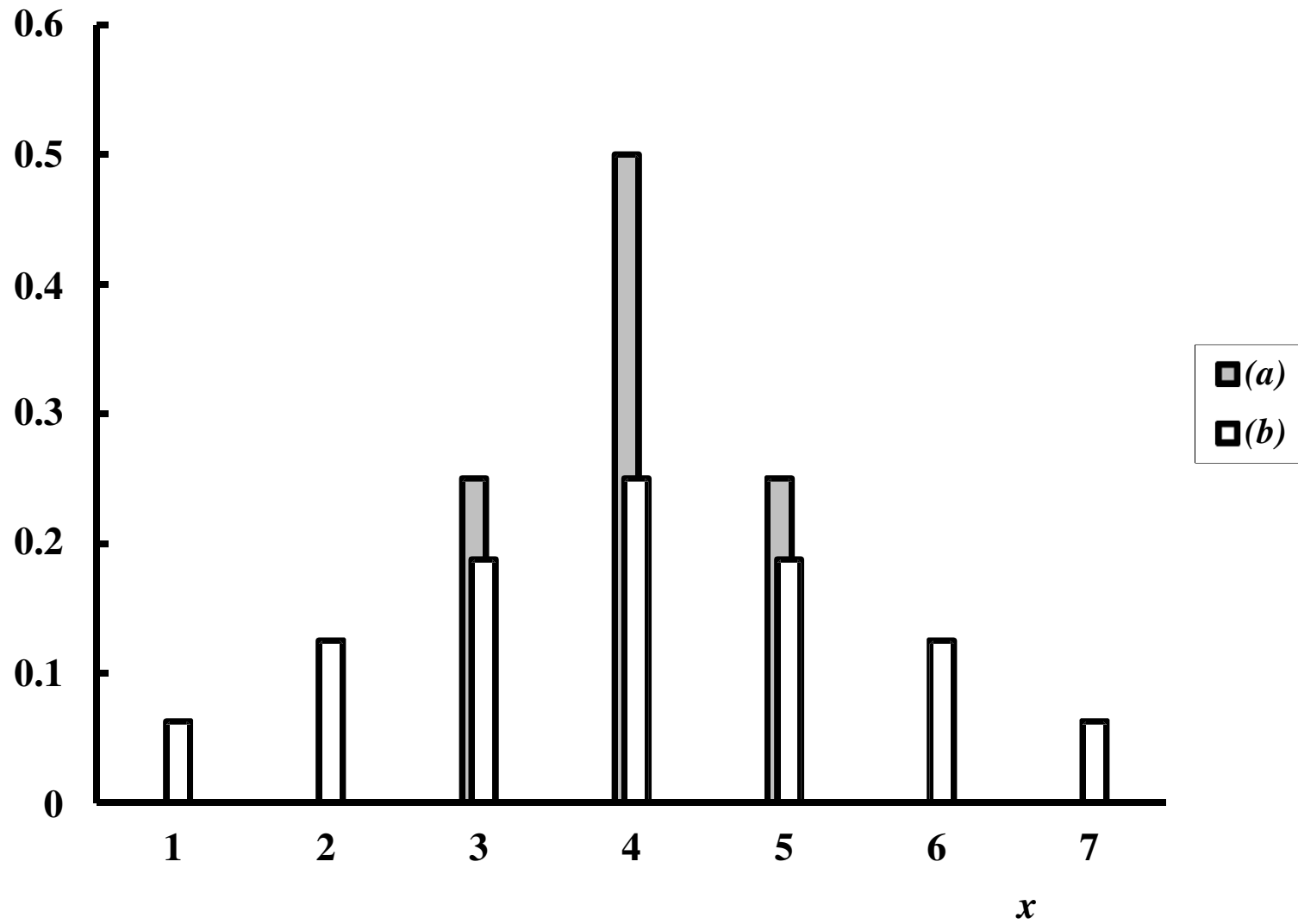
$$(a) \quad f(x) = \frac{2-|x-4|}{4} \quad x = 3,4,5,$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{4-|x-4|}{16} \quad x = 1,2,3,4,5,6,7.$$

Tem-se:

$$(a) \quad \mu = 4, \quad \sigma^2 = 0.5, \quad \sigma = 0.71, \quad CV = 0.1775, \quad \gamma_1 = 0;$$

$$(b) \quad \mu = 4, \quad \sigma^2 = 2.5, \quad \sigma = 1.58, \quad CV = 0.3950, \quad \gamma_1 = 0.$$





2.16 Quantis

- Os quantis ajudam a caracterizar o comportamento da variável aleatória. Eles tornam-se “imprescindíveis” quando esta não tem momentos.
- Na modelação de séries financeiras o VaR (“Value at Risk”) constitui um indicador importante. O VaR mais não é do que um quantil da distribuição dos retornos.

- **Definição – Quantil**

O quantil de ordem $(0 < \alpha < 1)$, q_α , é um valor de X que satisfaz a condição,

$$q_\alpha = \min\{x | F(x) \geq \alpha\},$$

ou seja é o menor valor de x em \mathfrak{R} que satisfaz a condição $F(x) \geq \alpha$

Exemplos 2.23: Seja X uma variável aleatória tal que $P(X=0)=0.8$ e $P(X=1)=0.2$.
Calcule $q_{0.5}$.

Exemplos 2.24: Seja X uma variável aleatória tal que $P(X=0)=0.4$ e $P(X=1)=0.6$.
Calcule $q_{0.5}$.

Exemplo – Retome-se o exemplo 2.15 - Seja X uma variável aleatória com função probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{6}{(\pi x)^2}, x = 1, 2, 3, \dots \text{ em que } \pi = 3.14159\dots$$

Calcule $q_{0.5}$.



No caso contínuo o quantil de ordem α é dado por: $q_\alpha = \min\{x | F(x) = \alpha\}$ ou seja, é o menor valor de x em \mathcal{R} que satisfaz a condição $F(x) = \alpha$.

Exemplo 2.25: Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1/2 & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases} .$$

Calcule $q_{0.5}$.

Se X é uma variável aleatória contínua com função distribuição $F(x)$ estritamente crescente, então $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, em que $F^{-1}(\alpha)$ é a inversa de $F(x)$ avaliada em α ;

Exemplo 2.26 - Seja X uma v.a. que traduz o montante de uma indemnização paga por uma seguradora para determinado risco. Sabe-se que

$$f(x) = \frac{5}{x^6}, \quad x \geq 1 \quad .$$

Calculem-se os quantis 0.5 e 0.95.

Note-se que $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^5$ para $x \geq 1$.

Localização

- **Mediana:** Quantil de ordem $\alpha = 0.5$, $q_{0.5}$ - **medida de localização**

Pode também representar-se a mediana com os símbolos μ_e ou $\text{med}(X)$.

Outras características

- **Quartis** ($\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$):
 - O primeiro quartil, $q_{0.25}$, delimita superiormente o primeiro quarto da massa de probabilidade;
 - O terceiro quartil, $q_{0.75}$, delimita inferiormente o último quarto da massa de probabilidade.
 - Obviamente que a mediana é o segundo quartil.



- **Intervalo inter-quartis:** O intervalo $(q_{0.25}, q_{0.75})$ abrange 50% da massa de probabilidade. A **amplitude inter-quartis constitui uma medida de dispersão absoluta**, no âmbito dos parâmetros de ordem,

$$AIQ = q_{0.75} - q_{0.25}.$$

Caso se pretenda uma medida de **dispersão relativa** utilizar $\frac{q_{0.75} - q_{0.25}}{\mu_e}$

- **Decis** ($\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$) e **percentis** ($\alpha = 0.01, 0.02, \dots, 0.99$);

Exemplo – Retome-se o exemplo 2.26 e calculem-se os quartis e as medidas de dispersão absoluta e relativa.



2.17 A moda

- **Moda - medida de localização**

A moda corresponde ao ponto do domínio que maximiza a função densidade/função probabilidade, o qual pode não ser único (ou pode não existir).

- No caso de distribuições simétricas unimodais, a média, a mediana e a moda são iguais.
- **Exemplo:** Para o exemplo 2.26 compare-se média, mediana e moda.